Bevezetés a kvantummechanikai összefonódottsághoz

Koniorczyk Mátyás[1,2] **és Tóth Géza**[1]

[1] *MTA Szilárdtestfizikai és Optikai Kutatóintézete, Budapest*
[2] *Pécsi Tudományegyetem Természettudományi Kar, Fizikai Intézet, Pécs*
kmatyas@optics.szfki.kfki.hu

1. Bevezetés

A kvantummechanika alapvető összefüggéseinek és azok alkalmazásának kutatása napjainkban reneszánszát éli. Ennek egyik fő mozgatórugója a kvantuminformatika megjelenése, amely az információ átvitelének és feldolgozásának alapvetően újszerű, hatékony módját ígéri. A kvantummechanikai elveken alapuló számítástechnikai eszközök megvalósításán számos kísérleti csoport dolgozik. Ennek mentén több olyan kísérleti és elméleti eredmény született az utóbbi években, amely a fizika más területein is eredményesen alkalmazható. Noha ezek jelenleg is kutatás tárgyát képezik, bizonyos módszerek, technikák mára kiforrottnak, általánosan elfogadottnak tekinthetőek.

Az összefonódottság a kvantuminformatika egyik kulcsfogalma. Mára világossá vált, hogy ennek a természeti jelenségnek a vizsgálata kikerülhetetlen. A problematika először Einstein, Podolsky és Rosen híres, 1935-ös cikkében [1] jelent meg, elsősorban tudományfilozófiai kontextusban, a kvantummechanika teljességével kapcsolatban. Az 1960-as évekig meg is maradt a kvantummechanika sokat vitatott, de kísérleti szempontból lényegtelennek tűnő problémájának. Az első kvantitatív vizsgálat Bell nevéhez fűződik [2], amelyet hamarosan követtek Clauser, Horne, Shimony és Holt kísérletei [3]. Bell munkája erősen kötődik a Bohm-féle rejtett paraméter elméletekhez [4, 5], középpontjában továbbra is egy elvi kérdés, a kvantummechanika és a lokális rejtett paraméter elméletek viszonya áll. Az összefonódottság problémakörének szélesebb körű vizsgálatát a lézerek és a nemlineáris optikai eszközök fejlődése alapozta meg, amely lehetővé tette az összefonódott kvantumállapotok hatékony laboratóriumi előállítását [6]. Ekkor került előtérbe az informatikai alkalmazás lehetősége is. A probléma tehát már nem csak a kvantummechanika elvi alapjait érinti, hanem annak gyakorlati alkalmazásait is.

A kilencvenes évek elejétől felmerült az igény az összefonódottság mértékének valamiféle kvantitatív jellemzése iránt. Mára ennek a kérdésnek igen kiterjedt irodalma alakult ki, és továbbra is intenzív kutatás tárgya. Az elmélet egyes elemei ugyanakkor a kvantuminformatikával foglalkozó tudományos közösség körében immár alapismeretnek tekinthetőek. Legújabban az is kiderült, hogy a kvantummechanikai összefonódottsággal kapcsolatos ismeretek igen gyümölcsözően alkalmazhatóak például a szilárdtestfizika numerikus módszereiben [7, 8], a fázisátalakulások megértésében [9]. Ezen elméleti technikák jelentősége tehát túlmutat a kvantuminformáció-elmélet keretein.

Ebben a tanulmányban az összefonódottság számszerű jellemzésének témaköréből két részproblémát, a párösszefonódottságot sok kvantumbit rendszerében, és az összefonódottsági tanúmennyiségek kérdését ragadtuk ki, a teljesség igénye nélkül röviden betekintést nyújtva a probléma természetébe, és ismertetve néhány összefüggést. A részleteket és az összefonódottság elméletének további problémáit illetően az irodalomjegyzék szolgálhat kiindulópontként.

2. Az összefonódottság fogalma és mérőszámai

A továbbiakban több részrendszerből álló kvantumrendszereket vizsgálunk. Gondolhatunk itt az elektromágneses tér módusaira, több neutron spinjére, fotonok polarizációjára, stb.. Jelölje $\mathscr{H}_k$ a k-adik részrendszer állapotterét! A k-adik részrendszer valamely tiszta kvantumállapotát a $\mathscr{H}_k$ állapottér egy $|\Psi\rangle_k$ vektora (pontosabban egységsugara) modellezi. Egy spin esetén ez az állapot lehet például a $|\Psi\rangle_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_k + |\downarrow\rangle_k)$, ahol $|\uparrow\rangle_k$ és $|\downarrow\rangle_k$ az adott spin z komponensének sajátállapotai. A teljes rendszer állapota a $\mathscr{H} = \otimes_k \mathscr{H}_k$ tenzorszorzat-térben található. A $|\Psi\rangle \in \mathscr{H}$ állapotot szeparálhatónak nevezzük, ha az előáll valamely $|\Psi\rangle_k$ állapotok tenzorszorzataként: $|\Psi\rangle = \otimes_k |\Psi\rangle_k$. A nem szeparálható állapotokat összefonódottnak nevezzük. Az összefonódott állapot tehát nem fogható fel úgy, mint az egyes részrendszerek egymástól független állapotainak összessége. Például két spin esetén a $|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2$ állapot szeparálható, míg az $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2)$ állapot összefonódott.

A kvantumrendszerek állapotait legáltalánosabban sűrűségoperátorokkal reprezentáljuk. Egy $|\Psi\rangle$ tiszta állapot esetén a ρ sűrűségoperátor a $|\Psi\rangle$-re vetítő $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ projektor. A rendszer állapotát gyakran nem ismerjük pontosan, csak az tudjuk, hogy az valamely p_i valószínűséggel $|\Psi_i\rangle$. Ez a helyzet például akkor áll elő, ha a vizsgált rendszer, amelyen méréseinket végezzük, egy nagyobb kvantumrendszer része. A valóságban a kvantumrendszerek nem teljesen izoláltak a környezetüktől, így a gyakorlatban legtöbbször ilyen, ún. kevert állapotokkal kell foglalkozni. Ilyen esetben a rendszer sűrűségoperátora nem projektor, hanem a tiszta állapotokra vetítő projektorok konvex kombinációja, vagyis a következő hermitikus pozitív szemidefinit operátor:

$$\rho = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|, \qquad \sum_i p_i = 1. \tag{1}$$

Ez a kvantumrendszer lehető legáltalánosabb állapota. Az (1) felbontás nem egyértelmű: ugyanazt a ρ állapotot többféle $(p'_i, |\Psi'_i\rangle)$ készlet is előállíthatja. A sűrűségoperátor ismeretében tetszőleges M fizikai mennyiség várható értékét kiszámíthatjuk:

$$\langle M\rangle = \mathrm{Sp}\,(\rho M)\,, \tag{2}$$

ahol Sp az operátor nyomát jelöli. A sűrűségoperátorok konvex halmazt alkotnak: akárhány, tetszőlegesen választott ρ_i sűrűségoperátor tetszőleges konvex kombinációja (más néven keveréke):

$$\rho' = \sum_i q_i \rho_i, \qquad \sum_i q_i = 1, \tag{3}$$

szintén a rendszer lehetséges állapotát írja le.

Egy kevert állapotot akkor nevezünk szeparálhatónak, ha előáll szeparálható tiszta állapotok konvex kombinációjaként, vagyis van olyan (1) alakú előállítása, amiben minden $|\Psi_i\rangle$ szeparálható. A nem szeparálható állapotokat összefonódottnak mondjuk. Fontos megjegyezni, hogy nem minden szeparálható állapot áll elő az egyes részrendszerek kevert állapotainak tenzorszorzataként. Vagyis egy $\rho = \otimes_k \rho_k$ szorzat alakú állapot szükségképpen szeparálható, de nem minden szeparálható állapot ilyen alakú: ilyenek keveréke is lehet. A kevert állapotok összefonódottságának leírása rendkívül bonyolult feladat [10, 11]. Értékesek például az úgynevezett szeparabilitási kritériumok: ezek a sűrűségoperátor olyan könnyen kiszámítható tulajdonságai, amelyek jelzik annak szeparabilitását, például a Peres$-$Horodecki-féle negativitási kritérium [12, 13]. Egy másik fontos kérdés az olyan mérhető mennyiségek keresése, amelyek várható értéke jelzi az összefonódottság jelenlétét. Ezekről az ún. összefonódottsági tanúmennyiségekről (*entanglement witness*) [13, 14, 15], amelyek a Bell-egyenlőtlenségekkel is szorosan összefüggenek [14, 16], részletesebben szól a 4. szakasz.

Legyen ρ egy N részrendszerből álló rendszer kvantumállapota. A k-adik részrendszer állapotát önmagában egy ρ_k sűrűségoperátor írja le, vagyis ha egy ezen a rendszeren értelmezett M_k fizikai mennyiséget mérünk, annak várható értékéhez a (2) képletben ezt az operátort kell használni. Ez a sűrűségoperátor a ρ teljes sűrűségoperátor részleges nyoma:

$$\rho_k = \mathrm{Sp}_{1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,N}(\rho). \tag{4}$$

Tekintsünk most két spint. Legyen ρ a teljes rendszer állapota. Ekkor az első spin állapota a spin-z komponens bázisán (4) szerint

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \rho_{\uparrow\uparrow,\uparrow\uparrow} + \rho_{\uparrow\downarrow,\uparrow\downarrow} & \rho_{\uparrow\uparrow,\downarrow\uparrow} + \rho_{\uparrow\downarrow,\downarrow\downarrow} \\ \rho_{\downarrow\uparrow,\uparrow\uparrow} + \rho_{\downarrow\downarrow,\uparrow\downarrow} & \rho_{\downarrow\uparrow,\downarrow\uparrow} + \rho_{\downarrow\downarrow,\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

ahol pl. $\rho_{\downarrow\uparrow,\uparrow\uparrow} = (\langle\downarrow| \otimes \langle\uparrow|)\rho(|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle)$. Tegyük fel továbbá, hogy ρ tiszta állapot, vagyis $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$. Amennyiben $|\Psi\rangle$ szorzatállapot, pl. $|\Psi\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$, akkor a két részrendszer tiszta állapotban van: $\rho_1 = \rho_2 = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$. Ha viszont $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle)$, akkor a részrendszerek állapotát az egységoperátorral arányos sűrűségoperátor írja le, amely bármely bázison a két bázisállapot inkoherens keveréke, az úgynevezett teljesen kevert állapot:

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|). \tag{6}$$

Ez az állapot bizonyos értelemben „a legmesszebb” van egy tiszta állapottól. Ezen állítás megértéséhez hasznos a Neumann-entrópia fogalma. Egy ρ sűrűségoperátor esetén ezt a következőképpen definiáljuk:

$$S(\rho) = -\,\mathrm{Sp}(\rho \log_2 \rho). \tag{7}$$

Az $S(\rho)$ azt méri, mennyi klasszikus információ, mennyi véletlenszerűség van a ρ állapotban. Tegyük fel, hogy a rendszeren valamilyen mérést végzünk, melynek a k-adik kimenetele p_k valószínűséggel következik be. A mérési eredmények információtartalmát bitekben mérve a $-\sum_k p_k \log_2 p_k$ Shannon-entrópia adja. A (7) Neumann-entrópia ennek a Shannon-entrópiának a minimuma. Ha a ρ tiszta állapot, kereshetünk olyan mérhető mennyiséget, amelynek ez sajátállapota. Ekkor a mérés kimenetele biztos, a mérés nem szolgáltat új információt, a Neumann-entrópia nulla. A (6) teljesen kevert állapot esetén a Neumann-entrópia a kétállapotú rendszerek esetén a maximális 1 értéket veszi föl: bármely bázison végzett mérés azonos valószínűséggel adja mindkét lehetséges eredményét – az információ mindenképp maximális, az állapot teljesen kevert.

A két spin esetére visszatérve, amennyiben azok együttesen egy tiszta állapotban vannak, a következő kép alakul ki. Szorzatállapot esetén a részrendszerek is tiszta állapotúak, tehát található rajtuk külön-külön olyan mérés, melynek kimenetele biztos. Egy összefonódott állapot esetén azonban a részrendszerek állapotába egy bizonytalanságot hoz be a másik részrendszer elhagyása. A fenti példában szereplő második, összefonódott állapot esetén például a részrendszer a (6) teljesen kevert állapotban van, noha a teljes rendszer állapota tiszta. Ezen gondolatmenet alapján van értelme arról beszélni, hogy egy kvantumállapot „összefonódottabb” a másiknál. Egy kétrészű (két részből álló) rendszer tiszta állapota esetén az összefonódottság mértéke az összefonódottsági entrópia:

$$E(|\Psi\rangle) = S(\rho_1), \qquad \rho_1 = \mathrm{Sp}_2\, |\Psi\rangle\langle\Psi|, \tag{8}$$

egyik részrendszer állapotának Neumann-entrópiája. Ez annak a véletlenszerűségnek mértéke, ami a másik részrendszer elhagyása folytán a sűrűségoperátorban megjelenik. Minél nagyobb az értéke, annál kevésbé jellemzi az egyes részrendszerek állapota a teljes rendszer állapotát. Az előző példában szereplő összefonódott állapot esetén például ez a kétállapotú rendszer esetében maximális 1 értéket veszi föl: ez az állapot maximálisan összefonódott. A (8) definíció nem csak két spinre alkalmazható, hanem bármely kétrészű rendszerre, amely tiszta állapotban van. Ilyenkor az összefonódottsági entrópia maximális értéke $\log_2 D$, ahol D a részrendszerek állapottereinek dimenziószámai közül a kisebbik.

Az összefonódottsági entrópiának több lényeges tulajdonsága van. Tegyük fel, hogy a két spin két külön laboratóriumban van, Aliznál és Bélánál. Aliz és Béla jól felszerelt laboratóriumukban bármiféle kísérletet végrehajthatnak a náluk lévő spinnel. Könnyen belátható, hogy – ha Aliz és Béla egymástól függetlenül saját laboratóriumában valamilyen lokális unitér transzformációt hajt végre a nála levő spin állapotán, pl.precesszáltatja azt egy adott tengely körül – az összefonódottság entrópiája változatlan marad. Ilyen értelemben tehát az adott mértékben összefonódott állapotok egymással ekvivalensek, egymásba alakíthatóak. De ennél több is igaz. Tegyük fel, hogy Aliz és Béla telefonon is beszélhetnek egymással, tehát kísérletek egész sorozatát végezhetik úgy, hogy például Aliz egy adott mérést végez a nála levő spinen, ennek eredményét közli Bélával, aki az eredménytől függően alakítja további méréseit. Tetszőleges számú mérést és üzenetváltást végezhetnek, de fizikai rendszereket nem juttathatnak el egymáshoz, csak klasszikus információt. Az ilyen protokollokat LOCC műveleteknek (*Local Operations and Classical Communication*) nevezzük. Belátható, hogy egy kétrészű rendszer tiszta állapota esetén az összefonódottság entrópiája LOCC műveletekkel nem növelhető. Az összefonódottság tehát sokkal erősebb tulajdonság, mint a klasszikus korreláció a két rendszer mért adatai között, hiszen ez utóbbi LOCC műveletekkel korlátlanul növelhető. Az összefonódottság tehát egyfajta erőforrás, amelyből egy adott kvantumállapotban valamennyi rendelkezésre állhat, de mennyisége csak a két részrendszer kölcsönhatásával növekedhet.

Összefoglalva az eddigieket, az összefonódottság kvantitatív jellemzése egy kétrészű rendszer tiszta állapota esetén mindig lehetséges az összefonódottsági entrópia segítségével. Ennek fő tulajdonságai: szeparálható állapotokra nulla, maximálisan összefonódott állapotokra maximális, lokális unitér transzformációkra invariáns, és LOCC műveletekkel nem növelhető.

Egy kétrészű rendszer kevert állapota esetén az összefonódottság olyan mennyiségi jellemzése, amely a fenti tulajdonságokkal rendelkezik, jóval bonyolultabb, és nem egyértelmű: a különböző alkalmazásokhoz különböző, nem ekvivalens mennyiségek felelnek meg. Azokat a mennyiségeket, amelyek rendelkeznek az előző bekezdésben felsorolt tulajdonságokkal, általában összefonódottsági monotonoknak, azokat pedig, amelyek mindemellett a tiszta kvantumállapotokra az összefonódottsági entrópiával azonos értékeket vesznek föl, összefonódottsági mértékeknek nevezzük. (Az irodalom itt még nem egységes sem az elnevezések, sem a definíciók kapcsán.) Ezek típusairól rövid összefoglalás található a [17] cikkben. Mint azt a következő szakaszban látni fogjuk, a probléma azzal is összefügg, hogy sokrészű rendszerek esetén az összefonódottság nem írható le pusztán az egyes párok összefonódottságával. A sokrészű összefonódottság mennyiségi jellemzése tehát szintén nemtriviális probléma, még tiszta állapotok esetén sem.

Az összefonódottsági mértékek nagy része nehezen vagy egyáltalán nem számítható ki. Ezért különösen értékesek azon monotonok, amelyek legalább bizonyos fizikai rendszerek esetén könnyen kiszámíthatóak, zárt alakban kifejezhetőek. A legtöbb ilyen mennyiség kétállapotú kvantumrendszerekre ismert, ezekkel kapcsolatos a 3. szakasz. (Megemlítjük, hogy a fény laboratóriumokban leggyakrabban előállított, a kvantumkommunikációs kísérletekben fontos ún. Gauss-típusú állapotaira is kidolgozott az összefonódottság elmélete [18, 19].) Az összefonódottsági mértékek és monotonok nem egyszerű, egyetlen hermitikus operátorral leírható mérhető mennyiségek. Ezért fontosak a már említett összefonódottsági tanúmennyiségek, amelyek könnyen mérhetőek, értékük jelzi az összefonódottság meglétét, de nem jellemzi annak mértékét. Ezekkel foglalkozik a 4. szakasz.

3. Párösszefonódottság sok kvantumbit rendszerében

A továbbiakban olyan rendszerekkel foglalkozunk, amelyek $N > 2$ darab kvantumbitből állnak. A kvantumbit fizikailag lehet bármely kétállapotú kvantumrendszer, pl. spin, polarizáció, stb..

A k-adik kvantumbit $\mathscr{H}_k$ állapotterén egy adott bázist használunk, ennek elemei $|0\rangle_k$,$|1\rangle_k$, a $\sigma^{(z)}$ Pauli-operátor sajátvektorai $+1$ illetve -1 sajátértékkel. A teljes rendszer 2^N dimenziós állapotterén az ún. számítási bázist

$$|i_1 i_2 \dots i_N\rangle = |i\rangle_1 \otimes |i\rangle_2 \otimes \dots \otimes |i\rangle_N, \qquad i_k = 0,1 \tag{9}$$

használjuk alapértelmezettként. A fő kérdés pedig: miként jellemezhető egy ilyen rendszer $|\Psi\rangle$ tiszta állapotának összefonódottsága.

Ez a probléma a következőképpen függ össze egy két kvatumbitből álló rendszer kevert állapotának összefonódottságával. Tegyük fel, hogy a két kvantumbit (1 és 2) együttes állapota valamely $\rho^{(12)}$ sűrűségoperátorral írható le. Ennek egy lehetséges, (1) szerinti előállítása

$$\rho^{(12)} = \sum_{k=1}^{\nu} p_k |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|. \tag{10}$$

Gondoljunk most el további kvantumbiteket, úgy, hogy a $3,\dots,N$ hozzáadott kvantumbitekből álló részrendszer állapottere legalább ν dimenziós legyen. Legyenek $|\xi_k\rangle$, $k = 1\dots\nu$ ortogonális állapotok ezen az állapottéren. Ekkor a teljes rendszer

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=1}^{\nu} \sqrt{p_k} |\Psi_k\rangle \otimes |\xi_k\rangle \tag{11}$$

kvantumállapotát a $\rho^{(12)}$ állapot *tisztításának* nevezzük, ugyanis

$$\mathrm{Sp}_{3,4,\dots,N} |\Psi\rangle\langle\Psi| = \rho^{(12)}. \tag{12}$$

Tehát ha a teljes rendszer a $|\Psi\rangle$ tiszta állapotban van, és a $3,\dots,N$ kvantumbiteket elhagyjuk, az első két kvantumbit a $\rho^{(12)}$ állapotban lesz. Általában a $\rho^{(12)}$ állapot $|\Psi\rangle$ tisztításáról beszélünk, ha (12) teljesül. Természetesen a tisztítás, hasonlóan az (1) alakú előállításhoz, nem egyértelmű. Ha egy tetszőleges két kvantumbites $\rho^{(12)}$ állapot összefonódottságát elemezzük, minden esetben gondolhatunk erre az állapotra úgy, mintha az egy sok kvantumbitből álló, tiszta állapotú rendszer két kvantumbites részrendszere lenne. Fordítva pedig: egy sok kvantumbitből álló rendszerben is érdekes probléma lehet a kétrészű részrendszerek összefonódottsága, hasonlóan pl. a statisztikus fizikából ismert párkorrelációkhoz.

3.1. Két kvantumbit összefonódottsága

Két kvantumbit összefonódottságát jól jellemzi például az előállítási összefonódottság (*entanglement of formation*), amelyet a következőképp definiálunk:

$$E_F(\rho^{(12)}) = \min_{\{p_k, |\Psi_k\rangle\}} \sum_k p_k E(|\Psi_k\rangle), \tag{13}$$

ahol a minimum a $\rho^{(12)}$ állapot összes lehetséges (1) alakú előállítására van értelmezve. Az előállítási összefonódottság az (1) alakú előállítások átlagos összefonódottságának minimuma.

Szemléletesen a következőképp értelmezhetjük. Gondoljunk a $\rho^{(12)}$ állapot (11) szerinti tisztítására. Ha a $3,\dots,N$ kvantumbitekből álló részrendszeren egy olyan mennyiséget mérünk, amelynek a $|\xi_k\rangle$ állapotok nemdegenerált sajátvektorai, az első két kvantumbit p_k valószínűséggel a $|\Psi_k\rangle$ állapotba kerül. Bármilyen tisztításon is végezzük mérésünket, a kapott tiszta állapotok összefonódottságának a mérés kimeneteleire vonatkoztatott átlagértéke legalább $E_F(\rho^{(12)})$.

Az előállítási összefonódottság összefonódottsági mérték. Noha szemléletes értelmezése kötődik az állapot tisztításához, valójában kizárólag a két kiszemelt kvantumbit $\rho^{(12)}$ állapotát jellemzi. Az előállítási összefonódottság nem csak kvantumbitekre értelmezett, de kvantumbitek esetén, mint látni fogjuk, zárt alakban megadható. Mielőtt ennek tárgyalására rátérünk, megemlítjük, hogy értelmezhető a

$$E_A(\rho^{(12)}) = \max_{\{p_k,|\Psi_k\rangle\}} \sum_k p_k E(|\Psi_k\rangle) \tag{14}$$

asszisztált összefonódottság (*entanglement of assistance*) [20] is. Ez nem összefonódottsági mérték: mint a következő szakaszban látni fogjuk, szeparálható állapotokra is felvehet nem nulla értéket. Ennek ellenére összefonódottságot illetően igen informatív mennyiség. Szemléletes jelentése hasonló az előállítási összefonódottságéhoz: képzeljük el, hogy az 1. kvantumbit Aliznál, a 2. Bélánál van, míg a $\rho^{(12)}$ állapot (11) szerinti tisztításában szereplő $3,\ldots,N$ kvantumbiteket Cecil kezeli, aki segíteni akar Aliznak és Bélának, hogy minél több összefonódottság álljon rendelkezésükre. Ennek érdekében a nála levő részrendszeren mérést végez. Az asszisztált összefonódottság megadja az így elérhető összefonódottság mérésekre vett átlagának maximumát. Érdemes megjegyezni, hogy az asszisztált összefonódottság is csak a $\rho^{(12)}$ állapottól függ.

Ugyanezen szemlélettel az előállítási összefonódottság a következőképpen értelmezhető: Cecil rosszindulatú, és olyan mérést végez a nála lévő részrendszeren, hogy a mérés után Aliz és Béla a lehető legkevésbé összefonódott állapottal rendelkezzék. Az így elérhető összefonódottság mérésekre vett átlagának minimuma az előállítási összefonódottság, ami ilymódon azt a párösszefonódottságot jellemzi, amely Cecil rosszindulata ellenére is szükségképpen megmarad. Az előállítási összefonódottság a két részrendszer mindenképp jelenlévő összefonódottságát jellemzi. Az asszisztált összefonódottság ennek bizonyos tekintetben komplementere.

Ezután megadjuk az előállítási összefonódottság kiszámítására azt az eljárást, amelynek megtalálása Wootters nevéhez fűződik [21, 22]. Tekintsük a $\rho^{(12)}$ két kvantumbites sűrűségoperátor ρ mátrixát a számítási bázison megadva. Definiáljuk a Wootters-hullám műveletet:

$$\tilde{\rho} = \left(\sigma^{(y)} \otimes \sigma^{(y)}\right) \rho^* \left(\sigma^{(y)} \otimes \sigma^{(y)}\right), \tag{15}$$

ahol a $*$ a sűrűségoperátor (9) szorzatbázison való komplex konjugáltját jelenti, a (15) definíció tehát nem bázisfüggetlen. Ezek után kiszámítjuk a $\rho\tilde{\rho}$ mátrix sajátértékeinek négyzetgyökeit, melyeket $\lambda_1,\ldots,\lambda_4$-gyel jelölünk, csökkenő sorrendben. Ezek pozitív valós számok, ugyanis megegyeznek a $\sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}$ hermitikus mátrix sajátértékeivel és a bázistól függetlenül csak magára a sűrűségoperátorra jellemzőek. Bevezetjük a konkurencia (*concurrence*) nevű mennyiséget:

$$C(\rho^{(12)}) = \max(0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4). \tag{16}$$

Az előállítási összefonódottság ezzel kifejezhető:

$$E_F = H\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-C^2}\right), \tag{17}$$

ahol $H(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$ a bináris entrópiafüggvény. Az előállítási összefonódottság két kvantumbitre tehát zárt alakban megadható.

Mivel az előállítási összefonódottság a konkurencia szigorúan monoton növő függvénye, a konkurencia maga is összefonódottsági monoton: jól jellemzi a kétrészű rendszer kevert állapotában szükségképpen jelenlévő párösszefonódottságot. A (16) képletnek köszönhető könnyű kiszámíthatósága a leggyakrabban használt összefonódottsági monotonná teszi.

Érdemes visszatérni az asszisztált összefonódottság kérdéséhez is. Definiáljuk az asszisztált konkurenciát (*concurrence of assistance*) [23] olymódon, hogy a (14) képletben az összefonódottság entrópiáját a konkurenciára cseréljük ki:

$$C_A(\rho^{(12)}) = \max_{\{p_k, |\Psi_k\rangle\}} \sum_k p_k C(|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|). \tag{18}$$

Ezen mennyiség az asszisztált összefonódottsághoz hasonló fizikai jelentéssel bír, leszámítva, hogy a Cecil mérései után keletkező összefonódottságot konkurenciában mérjük. Érdekes módon ez a mennyiség zárt alakban megadható [23]:

$$C_A(\rho^{(12)}) = \mathrm{Sp}\sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}} = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i. \tag{19}$$

Az asszisztált konkurencia szintén a két kvantumbit állapotát jellemzi, de nem összefonódottsági monoton. A környezet ideális manipulálásával elérhető maximális átlagos párösszefonódottságot adja meg konkurenciában mérve. A (19) képlet alapján ez is igen könnyen kiszámítható mennyiség, amely szintén haszonnal alkalmazható bizonyos problémákban (ld. [24]).

3.2. Párösszefonódottság sok kvantumbit rendszerében

Térjünk vissza ahhoz a kérdéshez, hogy mit mondhatunk egy N kvantumbitből álló, tiszta állapotú rendszer esetén két kiválasztott kvantumbit összefonódottságáról. A probléma természetét jól érzékelteti a következő példa.

Tekintsünk három kvantumbitet az úgynevezett Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) -állapotban [25]:

$$|\Psi_{\mathrm{GHZ}}\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle + |111\rangle\right). \tag{20}$$

Az első két kvantumbit állapotát a (4) alapján a

$$\rho^{(12)} = \frac{1}{2}\left(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|\right) \tag{21}$$

sűrűségoperátor írja le, amelyre a (16) szerint $C(\rho^{(12)}) = 0$ adódik. A (21) állapot láthatólag szeparálható, tehát az első két kvantumbit nincs összefonódva egymással. Az előállítási összefonódottság szemszögéből nézve: ha a harmadik kvantumbiten a $|0\rangle, |1\rangle$ bázison végzünk mérést, akkor az első két kvantumbit a $|00\rangle$ vagy az $|11\rangle$ szorzatállapotba kerül azonos valószínűséggel, vagyis ezzel a méréssel az első két kvantumbit összefonódottsága teljesen eltüntethető. Ez bármely másik két kvantumbitre igaz az állapot szimmetriája alapján. A (20) GHZ-állapotban tehát bármely kvantumbit-pár állapota szeparálható.

Ennek ellenére a teljes rendszer mégis összefonódott állapotban van! A (20) állapot nem szeparálható. Ez többek közt abból is látszik, hogy ha csak egy kiválasztott kvantumbitet tekintünk, az a (6) szerinti teljesen kevert állapotban van. Tehát a kiválasztott kvantumbit teljesen összefonódott a másik két kvantumbit együtteséből álló részrendszerrel. Ha azonban az egyes kvantumbiteket tekintjük részrendszernek, akkor látható, hogy a (20) GHZ -állapotban nincs páronkénti összefonódottság, hanem egyfajta többrészű összefonódottság van jelen. Ennek számszerű jellemzése még nem teljesen megoldott.

A (20) GHZ-állapotnak egy további érdekes sajátossága, hogy bármely kvantumbit-párra az asszisztált konkurencia, a (19) és (21) alapján, az 1 értéket veszi föl. A kimaradó harmadik kvantumbiten végzett megfelelő méréssel a kvantumbit-pár maximálisan összefonódott állapotba hozható. Valóban: ha a szóban forgó mérés sajátvektorai $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$, akkor azonos valószínűséggel a $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$ maximálisan összefonódott állapotokat kapjuk. A rendszerben jelenlévő többrészű összefonódottság ezesetben teljes egészében kétrészűvé alakítható.

Joggal merülhet föl az a kérdés is, hogy lehetséges-e olyan állapot, amelyben minden kvantumbit-pár maximálisan összefonódott. Ez lehetővé tenné például a tökéletes kvantumteleportációt bármely két kiválasztott kvantumbit között. Könnyen belátható, hogy ilyen állapot nem lehetséges. Két kvantumbit maximálisan összefonódott állapota szükségképpen tiszta állapot, ilymódon ez a két kvantumbit már semmi mással nem lehet összefonódva. A klasszikus korrelációkkal szemben az összefonódottság „monogám”: két részrendszer párösszefonódottsága korlátozza a többi részrendszerrel való összefonódottságot.

Ennek számszerű jellemzéséhez először bevezetjük a *tangle* mennyiséget tiszta állapotú teljes rendszer egy ρ állapotú kvantumbitére:

$$\tau = 4 \det \rho = 2(1 - \mathrm{Sp}\, \rho^2). \tag{22}$$

A definíció második alakjából látszik, hogy a tangle az egy kvantumbites sűrűségoperátor ún. lineáris entrópiája, amely a ρ állapot kevertségének egyfajta jellemzője. A tangle jelentése tehát valamennyire hasonlít az összefonódottság entrópiájához: azt jellemzi, mennyire fonódott össze a vizsgált kvantumbit a tiszta állapotban lévő teljes rendszer többi részével. (Ha a teljes rendszer állapota kevert, a (22) definíció helyett az előállítási összefonódottságához hasonló konstrukciót kell alkalmazni a tangle bevezetésére. Speciálisan két kvantumbit esetén az egyikre vonatkozó, megfelelően bevezetett tangle egyenlő konkurencia négyzetével.) A tangle szemléletes jelentése a következő. Képzeljük el a ρ kvantumbit állapot egy olyan (11) tisztítását, amely egyetlen kvantumbit hozzáadásával valósul meg! Ilyen mindig létezik. A tangle nem más, mint a kvantumbit összefonódottsága a tisztítás megvalósításához hozzáadott fiktív kvantumbittel, a konkurencia négyzetében mérve. Speciálisan, két kvantumbit tiszta állapota esetén az egyikre vonatkozó tangle egyenlő a konkurencia négyzetével.

Tekintsünk most sok kvantumbitet valamilyen tiszta állapotban, és vizsgáljuk a kvantumbitek páronkénti összefonódottságát konkurenciában mérve! Ilyenkor teljesülnek a Coffmann-Kundu-Wootters -egyenlőtlenségek [26]:

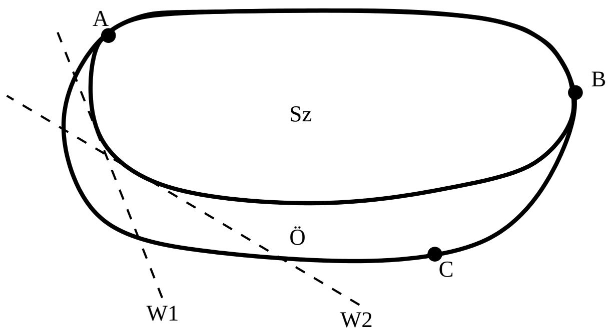
$$\tau_i \geq \sum_{k \neq i} C_{ik}^2. \tag{23}$$

Ez az egyenlőtlenség évekig csak néhány speciális esetben volt bizonyított, és sejtésként alkalmazták. Nemrégiben azonban általános bizonyítást nyert [27]. Akkor is alkalmazható, ha a teljes rendszer kevert állapotú, de ekkor a tangle megfelelő definícióját kell alkalmazni. Az *i*-edik kvantumbit összefonódottsága a rendszer többi részével tangle-ban mérve limitálja a kvantumbit konkurenciában mért összefonódottságát a többi kvantumbittel. Ennek alapján az előre meghatározott párösszefonódottságokkal rendelkező kvantumállapotok nem feltétlenül léteznek. Megtalálásukkal kapcsolatban azonban számos eredmény született [28, 29].

Végül térjünk rá az asszisztált összefonódottság és a párösszefonódottság kapcsolatára! Belátható [30], hogy az asszisztált konkurenciára

$$C_{A;ik} \leq \sqrt{\tau_i}, \tag{24}$$

vagyis a mérésekkel elérhető párösszefonódottság sem lehet nagyobb, mint amennyire egy adott kvantumbit a rendszer egészével összefonódott. (Ez az állítás a lineáris entrópia helyett a Neumann-entrópia használatával is megfogalmazható, ezesetben az asszisztált összefonódottság *entropikus küszöbét* kapjuk meg [20].) Sőt, sok tiszta állapotra belátható, hogy ha minden kvantumbit-párra $C_{A;ik} = C_{ik}$, akkor a (23) egyenlőtlenségek egyenlőségként teljesülnek. Tehát, ha eleve sok párösszefonódottság van a rendszerben, a mérésekkel sem kapható több. Ha a



1. ábra. *A szeparálható (Sz) és összefonódott (Ö) állapotok halmazának sematikus ábrázolása*

(24) egyenlőtlenségek teljesülnek egyenlőségként és a párösszefonódottság kicsi, akkor a rendszerben a sokrészű összefonódottság dominál. Az asszisztált konkurencia tehát valójában a sokrészű összefonódottságot jellemzi.

Sok kvantumbit rendszerében érdekes kérdés, hogy mekkora párösszefonódottságot nyerhetünk, ha az összefonódottság kétrészűvé alakításakor az egyes kvantumbiteken lokálisan végzett mérésekre szorítkozunk. Ez elvezet a lokalizálható összefonódottság (*localizable entanglement*) [31] bevezetéséhez, amelynek kvantuminformatikában, de újabban a fizika más területein is fontos szerep jut. Ennek részletes tárgyalása meghaladná a jelen tanulmány kereteit.

4. Összefonódottság detektálása tanúoperátorokkal

Amint azt már említettük, az előállítási összefonódottság csak kis rendszerekre számítható ki közvetlenül a sűrűségoperátor ismeretében. Nagyobb rendszerekre ilyen összefüggés nem áll rendelkezésünkre. Ráadásul az összefonódottság kísérleti detektálását nehezíti, hogy egy tipikus kísérletben a sűrűségoperátor nem ismert, ehhez ugyanis nagyon sok mérésre lenne szükség.

Ez teszi szükségessé olyan elégséges feltételek megalkotását, amelyek ha teljesülnek, akkor tudjuk, hogy az állapot összefonódott, ha viszont nem teljesülnek, akkor összefonódottság szempontjából a rendszerről nem áll rendelkezésünkre információ. Ezek a kritériumok tipikusan csupán néhány operátor mérését igénylik.

A legegyszerűbb ilyen kritérium-típus a tanúoperátoron (*entanglement witness*) alapuló elégséges feltétel összefonódottságra. A tanúoperátor olyan hermitikus operátor, amelynek várható értéke pozitív minden szeparálható állapotra, míg *némely* összefonódott állapotra várható értéke negatív. A tanúoperátorok várható értéke a sűrűségoperátor mátrixelemeinek lineáris függvénye. Az, hogy ilyen egyszerű elégséges feltételt lehet alkotni, a szeparálható állapotok halmazának különleges tulajdonságaiból következik. Mint már említettük, a kvantumállapotok halmaza konvex, lásd a (3) egyenletet. Ezt a halmazt az 1. ábrán egy konvex síkidom érzékelteti. Az (1) egyenlet alapján a tiszta állapotok a halmaz határán vannak, ezek ugyanis nem állnak elő más tiszta állapotok konvex kombinációjaként. Az ábrán az A, B és C ilyen tiszta állapotokat jelképez. A szeparálható állapotok halmaza a definíció következtében szintén konvex, ahogy az ábrán is látható. Az előbb említett pontok közül A és B szeparálható, míg C összefonódott. Az A és B állapot keverésével létrejövő szeparálható állapotoknak megfelelő pontok az A-t a B-vel összekötő szakaszon helyezkednek el.

Az 1. ábrán a W_1-gyel és W_2-vel jelölt szaggatott vonalak tanúoperátoron alapuló összefonódottság-kritériumokat jelképeznek. A tanúoperátor az egyenes bal oldalán levő pontoknak megfelelő állapotokat detektálja mint összefonódottakat. Látható, hogy egy tanúoperátor csupán az összefonódott állapotok egy részét detektálja. Az is látható, hogy ha a szeparálható állapotok halmaza nem volna konvex, nem lehetne egy lineáris kritériummal összefonódottságot detektálni.

Hogyan lehet tanúoperátorokat konstruálni? Ehhez olyan operátorokra van szükség, amelyek várható értékének maximuma kisebb szeparálható állapotokra, mint kvantumállapotokra általában. Tekintsük például az

$$M := \sigma^{(x)} \otimes \sigma^{(x)} + \sigma^{(z)} \otimes \sigma^{(z)} \tag{25}$$

operátort. Az $\langle M \rangle$ várható érték maximális értéke általános kvantumállapotokra 2. A $\rho_1 \otimes \rho_2$ alakú szorzatállapotokra a maximum a következőképpen határozható meg:

$$\langle M \rangle = \langle \sigma^{(x)} \rangle_1 \langle \sigma^{(x)} \rangle_2 + \langle \sigma^{(z)} \rangle_1 \langle \sigma^{(z)} \rangle_2. \tag{26}$$

$\langle \ldots \rangle_{1/2}$ az első, illetve a második részrendszerre számított várható értéket jelöli. Tudva, hogy

$$\langle \sigma^{(x)} \rangle_k^2 + \langle \sigma^{(y)} \rangle_k^2 + \langle \sigma^{(z)} \rangle_k^2 \leq 1 \tag{27}$$

$k = 1,2$ esetén, a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség segítségével azt kapjuk, hogy szorzatállapotokra $\langle M \rangle$ maximuma 1. Könnyen belátható, hogy ha szorzatállapotokra a maximum 1, akkor a szorzatállapotok (3) szerinti keveréséből előálló szeparálható állapotokra a maximum szintén 1. Ezek alapján a következő tanúoperátor konstruálható:

$$W := \mathbb{1}_4 - \sigma^{(x)} \otimes \sigma^{(x)} - \sigma^{(z)} \otimes \sigma^{(z)}, \tag{28}$$

ahol $\mathbb{1}_m$ $m \times m$-es egységmátrixot jelöl. $\langle W \rangle$ a minimumát, -1-et, a $|\Psi\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ állapotra veszi fel. Ezért azt mondhatjuk, hogy W összefonódottságot detektál a $|\Psi\rangle$ állapot közelében.

Tanúoperátorok hasonló módon készíthetőek többkvantumbites rendszerekre. Például, a következő tanúoperátor összefonódottságot detektál a már említett GHZ-állapot közelében [32]:

$$W' := \mathbb{1}_8 - \sigma^{(x)} \otimes \sigma^{(x)} \otimes \sigma^{(x)} - \sigma^{(z)} \otimes \sigma^{(z)} \otimes \mathbb{1}_2. \tag{29}$$

Végezetül még megemlítünk egy másik érdekes módszert összefonódottság detektálására. Az 1. ábrán a tanúoperátorokat szaggatott egyenes vonalak jelképezték. Felmerül a kérdés, nem lehetne-e hatékonyabban összefonódottságot detektálni nemlineáris kritériumokkal. Ezek a sűrűségoperátor mátrixelemeinek nemlineáris függvényén alapulnak. Azt várhatjuk, hogy ezek jobban rásimulhatnak a szeparálható állapotok halmazának határára, mint egy egyenes. Ilyen kritériumokat valóban elő lehet állítani [33].

Ezt a munkát az Európai Unió a CONQUEST hálózat, és az OTKA a T049234, T043287 és T034484 projektek keretében támogatta. T.G.-t az Európai Unió Marie Curie ösztöndíja támogatta (MEIF-CT-2003-500183, MERG-CT-2005-029146).

Hivatkozások

[1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).

[2] J. S. Bell, Physics **1**, 195 (1964).

[3] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, Phys. Rev. Lett. **23**, 880 (1969).

[4] D. Bohm, Phys. Rev. **85**, 166 (1952).

[5] D. Bohm, Phys. Rev. **85**, 180 (1952).

[6] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. **75**, 4337 (1995).

[7] Ö. Legeza and J. Sólyom, Phys. Rev. B **68**, 195116 (2003).

[8] F. Verstraete, D. Porras, and J. I. Cirac, Phys. Rev. Lett. **93**, 227205 (2004).

[9] A. Osterloh, L. Amico, G. Falci, and R. Fazio, Nature **416**, 608 (2002).

[10] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996).

[11] M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki: *Mixed-state entanglement and quantum communication, in G. Alber et al.: Quantum Information: An Introduction to Basic Theoretical Concepts and Experiments (Springer Tracts in Modern Physics)*, (Springer-Verlag, 2001), quant-ph/0109124.

[12] A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).

[13] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).

[14] B. M. Terhal, Phys. Lett. A **271**, 319 (2000).

[15] M. Lewenstein, B. Kraus, J. I. Cirac, and P. Horodecki, Phys. Rev. A **62**, 052310 (2000).

[16] R. A. Bertlmann, H. Narnhofer, and W. Thirring, Phys. Rev. A **66**, 032319 (2002).

[17] M. B. Plenio and S. Virmani, e-print quant-ph/0504163, (2005).

[18] G. Giedke *et al.*, Fortschritte Der Physik-Progress Of Physics **49**, 973 (2001).

[19] G. Giedke *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 107901 (2003).

[20] D. P. DiVincenzo *et al.*, *Entanglement of assistance, in: Quantum Computing and Quantum Communications*, Vol. 1509 of *Lecture notes in computer science*, p. 247, edited by C. Williams (Springer-Verlag, 1999), quant-ph/9803033.

[21] S. Hill and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **78**, 5022 (1997).

[22] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).

[23] T. Laustsen, F. Verstraete, and S. J. Van Enk, Quantum Information & Computation **3**, 64 (2003).

[24] M. Koniorczyk and V. Bužek, Phys. Rev. A **71**, 032331 (2005).

[25] D. M. Greenberger, M. A. Horne, and A. Zeilinger, Physics Today 22 (August 1993).

[26] V. Coffman, J. Kundu, and W. K. Wootters, Phys. Rev. A **61**, 052306 (2000).

[27] T. J. Osborne and F. Verstraete, e-print quant-ph/0502176, (2005).

[28] M. Plesch and V. Bužek, Phys. Rev. A **67**, 012322 (2003).

[29] M. Plesch and V. Bužek, Phys. Rev. A **68**, 012313 (2003).

[30] M. Koniorczyk, P. Rapčan, and V. Bužek, Phys. Rev. A **72**, 022321 (2005).

[31] M. Popp, F. Verstraete, M. A. Martin-Delgado, and J. I. Cirac, Phys. Rev. A **71**, 042306 (2005).

[32] G. Tóth and O. Gühne, Phys. Rev. Lett. **94**, 060501 (2005).

[33] O. Gühne, Phys. Rev. Lett. **92**, 117903 (2004).