Kvantum-összefonódottság detektálása sokrészecskés rendszerekben

Tóth Géza
Közös munka: C. Knapp, O. Gühne, és H.J. Briegel, Innsbruck

SZFKI, 2007. augusztus 23.

Vázlat

1. Bevezetés
2. Összefonódottság detekciója lokális mérésekkel
3. Összefonódottság detekciója kollektív mérésekkel
4. Kötött összefonódottság spinmodellekben

Vázlat

1. Bevezetés
2. Összefonódottság detekciója lokális mérésekkel
3. Összefonódottság detekciója kollektív mérésekkel
4. Kötött összefonódottság spinmodellekben

Bevezetés

- Miért fontos az összefonódottság?
  - Összefonódott részecskékre van szükség számos kvantum-informatikai eljáráshoz pl. kvantum-teleportációhoz, némelyik kvantum-kommunikációs protokollhoz, stb.
  - Szükséges számos kvantum-algoritmushoz, pl. keresés vagy prímszám faktorizálás.
  - Kvantum-kontroll kísérleteknél összefonódott állapotok realizálása a cél, mivel ezeknél lehet a klasszikustól radikálisan eltérő többtest jelenségeket megfigyelni.
- Általában említeni szokták az első két szempontot, de a harmadikról megfeledkeznek.
- Többtest kvantum-kontroll kísérletek ma különösen fontosak, mivel a technológiai fejlődés eljutott arra a szintre, hogy számos fizikai rendszerben (pl. ionok, atomok, fotonok) sokrészecskés összefonódottságot hozzanak létre.

Összefonódottság

- Egy kvantumállapot szeparálható ha le lehet írni szorzat állapotok konvex kombinációjaként

$$\rho = \sum_l p_l \rho_l^{(1)} \otimes \rho_l^{(2)} \otimes ... \otimes \rho_l^{(N)},$$

  ahol $\sum_l p_l = 1$ és $p_l > 0$.

- Egy állapot összefonódott ha nem szeparálható.
- Példák:
  - A $|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle$ állapot nem összefonódott.
  - A $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ állapot összefonódott.
  - A $(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)/2$ kevert állapot nem összefonódott.

Miért érdekes egy kísérletben az összefonódottság?

- Miért nem túl érdekesek azok a kísérletek, amelyek szeparálható állapotot hoznak létre? Mert igazából nem hoznak újat egy egyrészecskés kísérlethez képest.
- Például a következő százrécsecskés állapot létrehozása nem hoz újat ahhoz képest, mintha csak egy részecskét tettünk volna a $|\uparrow\rangle$ állapotba:

$$|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes ... \otimes |\uparrow\rangle.$$

- Általánosan fogalmazva, szeparálható állapotok előállíthatók olyan részsokaságok keverékéből, amelyekben a spinek között nincs kvantumkorreláció.

Összefonódottság detekciója: Tomográfia

- Az utóbbi években számos kísérletet végeztek többtest összefonódottság létrehozására. Ezek a kísérletek két részből álltak: (i) A kívánt kvantumállapot előállítasa, és (ii) annak detekciója, hogy a rendszer összefonódott.

- Hogyan lehet összefonódottságot detektálni? Kvantum-tomográfiával megmérhetjük a teljes sűrűségmátrixot, és utána alkalmazhatunk valamilyen összefonódottság-kritériumot.

- Probléma: N darab spin-$\frac{1}{2}$-es részecskére a sűrűségmátrix $2^N \times 2^N$-es. A szabad paraméterinek megmérése $4^N - 1$ mérést jelent. Nyilván $N = 1000$ részecske esetén ez a módszer nem működik.

Vázlat

1. Bevezetés
2. Összefonódottság detekciója lokális mérésekkel
3. Összefonódottság detekciója kollektív mérésekkel
4. Kötött összefonódottság spinmodellekben

Összefonódottság detekciója: Egyetlen operátor mérése

- Összefonódottságot lehet detektálni akár csupán egyetlen operátor megmérésével is (összefonódottság-tanúoperator). Például
$$\langle |GHZ_N\rangle\langle GHZ_N|\rangle > \frac{1}{2}$$
azt mutatja, hogy a rendszer összefonódott. Itt $|GHZ_N\rangle$ egy N-spin állapot $|GHZ_N\rangle := (|00...0\rangle + |11...1\rangle)/\sqrt{2}$.
- Probléma: Közvetlenül nem lehetséges megmérni a $|GHZ_N\rangle\langle GHZ_N|$ operátort. Fel kell bontani lokálisan mérhető operátorok szorzatára: Például

$$\begin{aligned}
|GHZ_3\rangle\langle GHZ_3| &= \frac{1}{8}(5\mathbb{1} - \sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)} - \sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(3)} - \sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)} - 2\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)}\sigma_x^{(3)}) \\
&+ \frac{1}{4}(\sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)})(\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(2)})(\sigma_x^{(3)} + \sigma_y^{(3)}) \\
&+ \frac{1}{4}(\sigma_x^{(1)} - \sigma_y^{(1)})(\sigma_x^{(2)} - \sigma_y^{(2)})(\sigma_x^{(3)} - \sigma_y^{(3)}).
\end{aligned}$$

[O. Gühne és P. Hyllus, Int. J. Theor. Phys. 42, 1001-1013 (2003).]

Összefonódottság detekciója: Egyetlen operátor mérése II

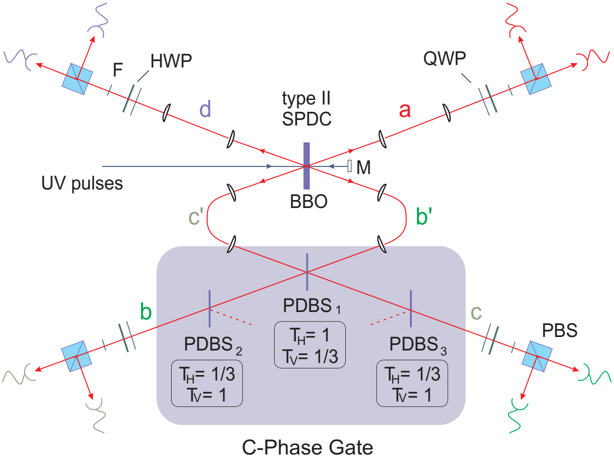
- Probléma: a dekompozícióhoz szükséges lokális mérések száma exponenciálisan nő a spinek számával.
- Újfajta, könnyen mérhető összefonódottság-kritériumok szükségesek.
- Vannak olyan operátorok, amelyek könnyen mérhetőek lokálisan még nagyszámú spin esetén is.

  [G. Tóth és O. Gühne, PRL 94, 060501 (2005).]

- Ez azért fontos, mert enélkül egyáltalán nem biztos, hogy egy kísérletben az előállított állapotról érdemleges információt lehet kapni.

Összefonódottság detekciója: Egyetlen operátor mérése III

- Négy-qbites klaszter-állapot előállítása és összefondódottságának detekciója [G. Tóth és O. Gühne, PRL 94, 060501 (2005); N. Kiesel *et al.*, PRL 95, 210502 (2005).]



Vázlat

1. Bevezetés
2. Összefonódottság detekciója lokális mérésekkel
3. Összefonódottság detekciója kollektív mérésekkel
4. Kötött összefonódottság spinmodellekben

Összefonódottság detekciója: Kollektív mérés

- Sokrészecskés rendszerek esetében a helyzet még nehezebb, mivel még kevesebb információ áll a rendelkezésünkre: Nem vagyunk képesek az egyes részecskéket egyenként elérni.
- Mivel a kísérletek egyre nagyobb és nagyobb kvantumrendszerek létrehozásásra iranyulnak, előbb-utóbb igen sok fizikai rendszer esetén ez a szituáció fog előállni.
- A mérehtő mennyiségek spin-$\frac{1}{2}$-es részecskék esetén a kollektív impulzismomentum és momentumainak várható értéke: $\langle J_x^m \rangle$, $\langle J_y^m \rangle$, és $\langle J_z^m \rangle$.

Spin-összenyomás (spin squeezing) I.

- A kollektív impulzusmomentum operátorainak definíciója

$$J_l := \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sigma_l^{(k)},$$

ahol $l = x, y, z$ és $\sigma_l^{(k)}$ a Pauli spin mátrixok. A $(\Delta J_l)^2$ varianciákat is mérni tudjuk. [Itt $(\Delta A)^2 := \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$.]

- Spin-összenyomás eredetileg a következőképp volt definiálva. Az impulzusmpomentum variancájára a következő egyenlőtlenségnek kell teljesülnie:

$$(\Delta J_x)^2(\Delta J_y)^2 \geq \frac{1}{4}|\langle J_z\rangle|^2.$$

Ha $(\Delta J_x)^2$ kisebb mint a standard kvantum határérték, akkor beszélünk spin-összenyomásról. [M. Kitagawa és M. Ueda, PRA 47, 5138 (1993).]

Spin-összenyomás II.

- Spin-összenyomás kísérlet 10^7 atommal: [J. Hald, J. L. Sørensen, C. Schori, és E. S. Polzik, Spin Squeezed Atoms: A Macroscopic Entangled Ensemble Created by Light, PRL 83, 1319 (1999)]

- A spin-összenyomás kritérium összefonódottság detekciójára

$$\frac{(\Delta J_x)^2}{\langle J_y \rangle^2 + \langle J_z \rangle^2} \geq \frac{1}{N}.$$

Ha egy kvantumállapot sérti ezt a kritériumot, akkor összefonódott.

[A. Sørensen *et al.*, Nature **409**, 63 (2001).]

Általánosított Spin-összenyomás kritériumok

- 1. Kritérium. Szeparálható állapotokra $\langle J_x^2\rangle + \langle J_y^2\rangle \leq (N^2+N)/4$. Ezzel olyan N qbites szimmetrikus Dicke állapotok közelében lehet összefonódottságot detektálni amelyekre $\langle J_z\rangle = 0$. Például $N=4$-re ez az állapot $(|0011\rangle + |0101\rangle + |1001\rangle + |0110\rangle + |1010\rangle + |1100\rangle)/\sqrt{6}$.

  [G. Tóth, J. Opt. Soc. Am. B **24**, 275 (2007); N. Kiesel *et al.*, PRL 98, 063604 (2007).]

- 2. Kritérium. Szeparálható állapotokra $(\Delta J_x)^2 + (\Delta J_y)^2 + (\Delta J_z)^2 \geq N/2$. A bal oldalra a szinglet álapotok nullát adnak. Ilyen állapot például az antiferromagnetikus Heisenberg lánc alapállapota.

  [G. Tóth, PRA **69**, 052327 (2004).]

- 3. Kritérium. Szimmetrikus szeparálható állapotokra $1 - 4\langle J_m\rangle^2/N^2 \leq 4(\Delta J_m)^2/N$. [J. Korbicz *et al.* PRL **95**, 120502 (2005).]

- Hogyan lehetne az összes ilyen kritériumot megtalálni?

Az összes lehetséges spin-összenyomás kritérium

- Jelölések: $\mathbf{J} := (\langle J_x\rangle, \langle J_y\rangle, \langle J_z\rangle)$ és $\mathbf{K} := (\langle J_x^2\rangle, \langle J_y^2\rangle, \langle J_z^2\rangle)$.
- Tegyük fel, hogy egy rendszerre csak **J**-t és **K**-t ismerjük. Az elemeikkel szeparálható állapotokra a következő egyenlőtlenségek írhatók fel:

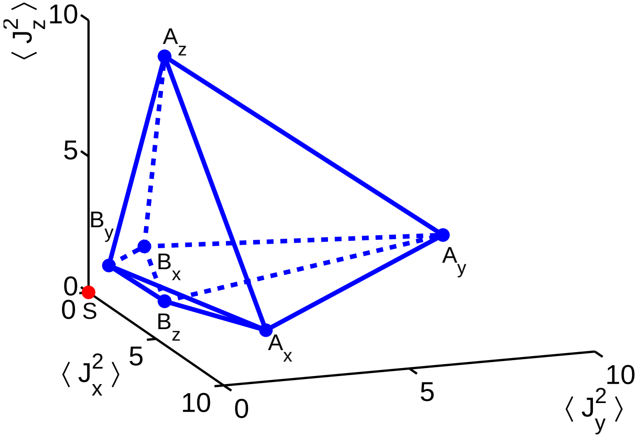
$$
\begin{aligned}
\langle J_x^2\rangle + \langle J_y^2\rangle + \langle J_z^2\rangle &\leq N(N+2)/4, && \text{(1a)}\\
(\Delta J_x)^2 + (\Delta J_y)^2 + (\Delta J_z)^2 &\geq N/2, && \text{(1b)}\\
\langle J_k^2\rangle + \langle J_l^2\rangle - N/2 &\leq (N-1)(\Delta J_m)^2, && \text{(1c)}\\
(N-1)\left[(\Delta J_k)^2 + (\Delta J_l)^2\right] &\geq \langle J_m^2\rangle + N(N-2)/4, && \text{(1d)}
\end{aligned}
$$

ahol k, l, m felveszi az x, y, z összes permutációit.

[G. Tóth, C. Knapp, O. Gühne, és H.J. Briegel, quant-ph/0702219.]

A politóp

- Ezek az egyenlőtlenségek *fix* $\langle J_{x/y/z} \rangle$*-re* , egy politópot határoznak meg a második momentumok terében. A politópnak hat csúcsa van $A_{x/y/z}$ és $B_{x/y/z}$. $\langle \mathbf{J} \rangle = 0$ és $N = 6$ esetén a politóp a következő



A politóp II

- A csúcsok koordinátái:

$$A_x := \left[\frac{N^2}{4} - \kappa(\langle J_y\rangle^2 + \langle J_z\rangle^2), \frac{N}{4} + \kappa\langle J_y\rangle^2, \frac{N}{4} + \kappa\langle J_z\rangle^2\right],$$

$$B_x := \left[\langle J_x\rangle^2 + \frac{\langle J_y\rangle^2 + \langle J_z\rangle^2}{N}, \frac{N}{4} + \kappa\langle J_y\rangle^2, \frac{N}{4} + \kappa\langle J_z\rangle^2\right],$$

ahol $\kappa := (N-1)/N$. Az $A_{y/z}$ és $B_{y/z}$ pontokat a koordináták permutációival lehet megkapni.

A politóp III

- Vegyül először a $\langle \mathbf{J} \rangle = 0$ esetet.
- Ekkor az A_x-hez tartozó állapot a

$$|+1, +1, +1, +1, ...\rangle_x$$

  és

$$|-1, -1, -1, -1, ...\rangle_x.$$

  állapotok $50 - 50\%$-os keveréke.
- A B_x–hez tartozó állapot a

$$|+1\rangle_x^{\otimes N/2} \otimes |-1\rangle_x^{\otimes N/2}.$$

- Az $A_{y/z}$-hez és a $B_{y/z}$-hez tartoző állapotokat hasonlóan definiáljuk.

A politóp IV

- Általános eset: $\langle \mathbf{J} \rangle \neq 0$.
- Az A_x-hez tartozó állapot a következő

$$\rho_{A_x} = p(|\psi_+\rangle\langle\psi_+|)^{\otimes N} + (1-p)(|\psi_-\rangle\langle\psi_-|)^{\otimes N}.$$

  Itt $|\psi_{+/-}\rangle$ egy qbites állpotok a következő Bloch-vektor koordinátákkal: $(\langle\sigma_x\rangle, \langle\sigma_y\rangle, \langle\sigma_z\rangle) = (\pm c_x, 2\langle J_y\rangle/N, 2\langle J_z\rangle/N)$. Itt $c_x := \sqrt{1 - 4(\langle J_y\rangle^2 + \langle J_z\rangle^2)/N^2}$. A keverési arány $p := 1/2 + \langle J_x\rangle/(Nc_x)$.
- Ha $N_1 := Np$ egész szám, a B_x ponthoz is tartozik egy szeparálható állapot

$$|\phi_{B_x}\rangle = |\psi_+\rangle^{\otimes N_1} \otimes |\psi_-\rangle^{\otimes(N-N_1)}.$$

  Ha N_1 nem egész szám, akkor lehetséges egy olyan B_x' pontot találni, amely egy szeparálható állapothoz tartozik és a B_x-től való távolsága 1/4-nél kisebb.

Az általánosított spin-összenyomás kritériumrendszer teljes

- Gyakorlatilag minden ponthoz a politópban tartozik szeparálható állapot.
- Ez azt jelenti, hogy újabb egyenlőtlenséget nem lehet a rendszerhez adni.
- Ha egy állapot valamelyik egyenlőtlenséget sérti, akkor összefonódott. Ezek az egyenlőtleségek minden összefonódott állapotot detektálnak, amelyek a kollektív impulzusmomentum első és második momentuma alapján detektálható.

Vázlat

1. Bevezetés
2. Összefonódottság detekciója lokális mérésekkel
3. Összefonódottság detekciója kollektív mérésekkel
4. Kötött összefonódottság spinmodellekben

Két-spin összefonódottság

- Minden mennyiség, amely a kritériumunkban feltűnik, előállítható a kétspin redukált sűrűségmátrix ismeretében:

$$\rho_{ks} := \frac{1}{N(N-1)} \sum_{k \neq l} \rho_{kl}.$$

- Például

$$\begin{aligned}
\langle J_x \rangle &= \frac{N}{4} \langle \sigma_x \otimes \mathbb{1} \rangle_{\rho_{ks}}, \\
\langle J_x^2 \rangle &= \frac{N}{4} + \frac{N(N-1)}{4} \langle \sigma_x \otimes \sigma_x \rangle_{\rho_{ks}}.
\end{aligned}$$

- Kérdés: Ezek szerint ezek a kritériumok azt detektálják, hogy a kétspin redukált sűrűségmátrix összefonódott vagy sem? Válasz: Nem.
- A kritériumok detektálnak olyan összefonódott állapotokat is, amelyek esetében a kétspin sűrűségmátrix szeparálható.

Kötött összefonódottság spinláncpkban

- Tekintsünk négy spin-$\frac{1}{2}$ részecskét, amelyek a következő Hamilton operátor által megadott módón hatnak kölcsön:

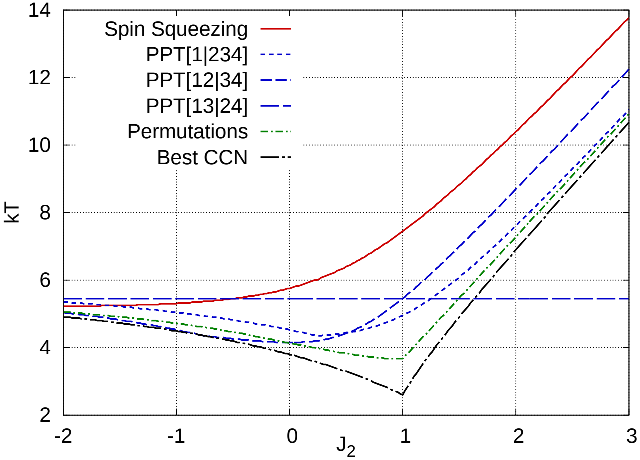
$$H = (h_{12} + h_{23} + h_{34} + h_{41}) + J_2(h_{13} + h_{24}).$$

  Itt $h_{ij} = \sigma_x^{(i)} \otimes \sigma_x^{(j)} + \sigma_y^{(i)} \otimes \sigma_y^{(j)} + \sigma_z^{(i)} \otimes \sigma_z^{(j)}$ a Heisenberg kölcsönhatás az *i*. és *j*. qbit között.

- Van olyan fizikai rendszer amelyet ez a Hamilton operátor ír le. [I. Bose és A. Tribedi, PRA **72**, 022314 (2005); T. Vértesi és E. Bene, PRB **73**, 134404 (2006).]
- Erre a Hamilton operátorra kiszámítjuk a termális állapotot a $\varrho(T, J_2) \propto \exp(-H/kT)$ képlet segítségével.
- Különböző összefonódottság kritériumok esetén megnézzük, milyen magas hőmérsékletig detektálják az állapotot összefonódottnak.

Kötött összefonódottság spinláncpkban II

- Határhőmérsékletek különböző összefonódottság-kritériumokhoz



- Hasonló a helyzet nagyobb spinláncok esetében is.

Összefoglalás

- Röviden bemutattam a kísérleti összefonódottságédetekcióhoz kapcsolódó főbb problémákat.
- Először a helyi mérésekkel való összefonódottságédetekcióról beszéltem.
- Az előadás második részében a kollektív méréssel való összefonódottságdetekció került elő.
- Olyan kritériumokat mutattam be, amelyek minden összefonódott állapotot detektálnak, amelyek detektálhatók a kollektív impulzusmomentum első és második momentumai alapján.
- Ezek a kritériumok alkalmasak kötött összefonódottság detektálására spinláncokban.

További részletek:

http://uk.arxiv.org/abs/quant-ph/0702219
http://optics.szfki.kfki.hu/~toth.